# 1 Osnovna načela

**Funkcija** je preslikava $f: X \to Y$, kjer $f \subseteq X \times Y \wedge \forall x \in X\ \exists!\ y \in Y: (x,y) \in f$. Funkcija f je **injektivna**, če $\forall a,b \in X: f(a) = f(b) \implies a = b$; **surjektivna**, če $\forall y \in Y\ \exists x \in X: f(x) = y$; **bijektivna**, če injektivna in surjektivna. Funkcija $f: X \to X$ je **idempotentna**, če $f \circ f = f$ oz. če $\forall y \in f(X)$ velja $f(y) = y$.
**Množica preslikav** $X: \to Y$ je $Y^X$, $|Y^X| = |Y|^{|X|}$.
**Permutacija** je bijekcija $f: X \to X$. $S_n$ je množica $\forall$ permutacij [n], $|S_n| = n!$. Število cikličnih permutacij v $S_n = (n-1)!$.
**Dirichletovo načelo**: (1) $|X| > |Y| \implies \neg\exists$ injekcija $f: X \to Y$. (2) Imamo n kroglic, ki jih dajemo v m škatel tako, da v vsaki čim manj kroglic: $r \in \mathbb{N}: n > r \cdot m \implies \exists$ škatla z $\geq r+1$ kroglicami.
**Načelo vsote, produkta**: $A_1, \ldots, A_n$ množice:

$$A_i \cap A_j = \emptyset\ i \neq j \implies |\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| \qquad \left|\prod_{i=1}^n A_i\right| = \prod_{i=1}^n |A_i|$$

**Asimptotska enakost**: $a_n \sim b_n \iff lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.
**Stirlingova formula**: $n! \sim \sqrt{2\pi^n} \cdot (\frac{n}{e})^n$

$k^{\overline{n}} = k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (k+n-1) \quad k^{\underline{n}} = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1)$
**(T1)** Idempotentnih funkcij $f: [n] \to [n]$ je $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \cdot i^{n-i}$.

# 2 Podmnožice in Načrti

## 2.1 Binomski koeficienti

**Binomski koeficient**: $n,k \in \mathbb{N}_0$, $A$ množica:

$$\binom{A}{k} := \{B \subseteq A: |B| = k\} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} := \left|\binom{[n]}{k}\right|$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \begin{cases} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!};\ 0 \leq k \leq n \\ 0;\ \text{sicer} \end{cases}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

**Binomski izrek**: Naj bo $(R,+,\cdot)$ komutativen kolobar in $a,b \in R$, potem:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

**Kroneckerjeva delta**: $\delta_{ij} := \begin{cases} 1: & i = j \\ 0: & i \neq j \end{cases} \quad \delta_{n0} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0^n$.

## 2.2 Izbori

Med **n** kroglicami jih **k** izbiramo:

| Vrstni red (pomemben) | Ponavljanje (dovoljeno) | |
|---|---|---|
| | JA | NE |
| JA - variacije | $n^k$ | $n^{\underline{k}}$ |
| NE - kombinacije | $\binom{n+k-1}{k}$ | $\binom{n}{k}$ |

## 2.3 Kompozicije

**Kompozicija** števila $n \in \mathbb{N}$ je $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, če $\lambda_i \geq 1$ in $\lambda_1 + \cdots + \lambda_l = n$. Če $\lambda_i \geq 0$, je kompozicija **šibka**. $\lambda_i$ člen, $l$ dolžina in $n$ velikost kompozicije.
**Število kompozicij** n je $2^{n-1}$, n dolžine k pa $\binom{n-1}{k-1}$ za $n,k \geq 1$.
**Število šibkih kompozicij** n dolžine k je $\binom{n+k-1}{n}$ za $n,k \geq 1$.

## 2.4 Načelo vključitev in izključitev

$A_1, \ldots, A_n \in A$ množice, $I \subseteq [n]$ in $A_I = \cap_{i\in I} A_i$:

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{I\subseteq[n], I\neq\emptyset} (-1)^{|I|-1} \cdot |A_I|$$

$$|\cap_{i=1}^n A_i^c| = \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} \cdot |A_I|$$

**Eulerjeva funkcija**:

$$\Phi(n) = |\{i \in [n]: \gcd(n,i) = 1\}| = n \cdot \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$$

## 2.5 Multinomski koeficient

**Multimnožica** $M = \{1^{a_1}, \ldots, n^{a_n}\}$je neurejen seznam objektov s ponavljanjem.
**Multinomski koeficient** je $\binom{m}{a_1,\ldots,a_n} = \frac{m!}{a_1!\ldots a_n!}$
**Število permutacij multimnožice**: $\binom{a_1+\cdots+a_n}{a_1,\ldots,a_n}$
**Multinomski izrek**:

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{i_1+\cdots+i_k=n,\ i_j\geq 0} \binom{n}{i_1,\ldots,i_k} \cdot x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_K}$$

## 2.6 Načrti in t-načrti

**Načrt** je $B = \{B_1, \ldots, B_b\}$ s parametri $(v,k,\lambda)$, če velja: $B_i \subseteq [v]$, $|B_1| = \cdots = |B_b| = k$ in $\forall i \in [v]\ \exists$ natanko $\lambda$ indeksov j, da velja $i \in B_j$.

$$\text{Načrt s parametri } (v,k,\lambda)\ \exists \iff k \mid v \cdot \lambda\ \wedge\ \lambda \leq \binom{v-1}{k-1}$$

**T-načrt** je $B = \{B_1, \ldots, B_b\}$ s parametri $(v,k,\lambda_t)$, če velja: $B_i \subseteq [v]$, $|B_1| = \cdots = |B_b| = k$ in $\forall A \subseteq [v]$, $|A| = t$ velja $A \subseteq B_j$ za natanko $\lambda_t$ indeksov j.

$B$ t-načrt s parametri $(v,k,\lambda_t) \implies B$ (t-1)-načrt s parametri $(v,k,\lambda_{t-1})$

$$\lambda_{t-1} = \lambda_t \cdot \frac{v-t+1}{k-t+1}$$

**Steinerjev trojček** je 2-načrt s parametri $(v,3,1)$.
**(T1)** $B$ 2-načrt s parametri $(v,k,\lambda_2) \implies k \cdot (k-1) \mid \lambda_2 \cdot v \cdot (v-1)$.
**(T2)** Steinerjev trojček $\exists$ le ko je $v \equiv 1 (\text{mod } 6)$ ali $v \equiv 3 (\text{mod } 6)$.
**(T3)** Naj velja, da so $S + i;\ i \in \mathbb{Z}_n\ \forall$ med seboj različni $\implies$ $\{S + i;\ i \in \mathbb{Z}_n\}$ načrt s parametri $(n, |S|, |S|)$.

# 3 Permutacije, Razdelitve, Razčlenitve

## 3.1 Sterlingova števila 1. vrste

**Sterlingovo število 1. vrste** je število permutacij v $S_n$ s $k$ cikli, $C(n,k)$.

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1) \cdot C(n-1,k)$$

$$\sum_k C(n,k) \cdot x^k = x^{\overline{n}}$$

$$\sum_k (-1)^{n-k} \cdot C(n,k) \cdot x^k = x^{\underline{n}}$$

## 3.2 Sterlingova števila 2. vrste in Bellova števila

**Razdelitev** množice A je $\{B_1, \ldots, B_k\}$ da velja: (1) $B_i \neq \emptyset\ \forall i \in [k]$ (2) $B_i \cap B_j = \emptyset\ i \neq j$ (3) $\cup_{i=1}^k B_i = A$.
**Sterlingovo število 2. vrste** $S(n,k)$ je število razdelitev [n] s k bloki.
**Bellovo število** $B(n)$ je število razdelitev [n].

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$$

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \dot{B}(k)$$

$$B(n) = \sum_{k=0}^n S(n,k)$$

$$\sum_k S(n,k) \cdot x^{\underline{k}} = x^n$$

$$\sum_k (-1)^{n-k} \cdot S(n,k) \cdot x^{\overline{k}} = x^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot S(k,m) = S(n+1,m+1)$$

**Število surjekcij** $[n] \to [k]$ je $k! \cdot S(n,k)$.

$$S(n,k) = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} \cdot j^n}{j!(k-j)!}$$

Tabela **Bellovih** in **Sterlingovih števil 2. vrste**:

| $n\backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $B(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | 0 | 15 |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | 52 |

## 3.3 Lahova števila

**Lahovo število** $L(n,k)$ je število razdelitev [n] na k linearno urejenih blokov.

$$L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1)\cdot L(n-1,k)$$

$$L(n,k) = \frac{n!}{k!}\cdot\binom{n-1}{k-1} \quad n,k \geq 1$$

$$\sum_k L(n,k)\cdot x^{\underline{k}} = x^{\overline{n}}$$

$$\sum_k (-1)^{n-k}\cdot L(n,k)\cdot x^{\overline{k}} = x^{\underline{n}}$$

**Opomba:** $S(n,k) \leq C(n,k) \leq L(n,k)$.

## 3.4 Razčlenitve

**Razčlenitev** števila $n \in \mathbb{N}$ je $(\lambda_1,\dots,\lambda_l)$, kjer $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_l$ in $\lambda_1 + \dots + \lambda_l = n$. $\lambda_i$ je člen, $l = l(\lambda)$ dolžina in $n = |\lambda|$ velikost razčlenitve.
**Konjugirana razčlenitev** $\lambda'$ ima diagram, ki je transponiran diagram $\lambda$, $\lambda'_j = \max\{i : \lambda_i \geq j\} = |\{i : \lambda_i \geq \lambda_j\}|$, $\lambda'' = \lambda$. $\lambda$ je **sebiadjungirana**, če $\lambda' = \lambda$.
**Število razčlenitev** števila n poljubne dolžine je $P(n)$, dolžine k $P_k(n)$, dolžine $\leq$ k $\overline{P}_k(n)$:

$$P_k(n) = \overline{P}_k(n-k)$$

$$P_k(n) = P_{k-1}(n-1) + P_k(n-k)$$

$$\overline{P}_k(n) = \overline{P}_k(n-k) + \overline{P}_{k-1}(n)$$

$$P_n(2n) = P(n)$$

**Eulerjev 5-kotniški izrek**:

$$P(n) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(P\left(n - \frac{k\cdot(3k-1)}{2}\right) + P\left(n - \frac{k\cdot(3k+1)}{2}\right)\right)$$

**(T1)** Število sebiadjungiranih razčlenitev n = številu razčlenitev na različne lihe člene.

## 3.5 Dvanajstera pota

**Injektivna** razporeditev: v vsaki škatli je največ ena kroglica
**Surjektivna** razporeditev: v vsaki škatli je vsaj ena kroglica

ß Razporejamo **n** kroglic v **k** škatel:

| | | # možnosti | | |
|---|---|---|---|---|
| n | k | $\forall$ | injektivne | surjektivne |
| L | L | $k^n$ | $k^{\underline{n}}$ | $k!\cdot S(n,k)$ |
| N | L | $\binom{n+k-1}{k-1}$ | $\binom{k}{n}$ | $\binom{n-1}{k-1}$ |
| L | N | $\sum_{i\leq k} S(n,i)$ | 1: $n \leq k$ \| 0: $n > k$ | $S(n,k)$ |
| N | N | $\overline{P}_k(n)$ | 1: $n \leq k$ \| 0: $n > k$ | $P_k(n)$ |

L - ločimo kroglice/škatle, N - ne ločimo kroglice/škatle

# 4 Rodovne funkcije

$(K,+,\cdot)$ je **polje**, če sta $(K,+)$ in $(K-\{0\},\cdot)$ Abelovi grupi in velja distributivnost. **Karakteristika** K oz. $char(K)$ je najmanjši $p \in \mathbb{N}$: $1\cdot p = 0 \in K$. Če tak p $\nexists$, potem $char(K) = 0$.
Kolobar K ima **delitelje niča** če $\exists a,b \in K - \{0\} : a\cdot b = 0$.
Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje oz. preslikava $\mathbb{N} \to K$ kjer K polje in $char(K) = 0$. **Formalna potenčna vrsta** je potem $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Naj bo njen multiplikativni inverz $p(x)$, potem je **rodovna funkcija** te potenčne vrste $\frac{1}{q(x)}$.
Naj bo K polje in $char(K) = 0$:

$$K[x] = \{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mid n \in \mathbb{N} \wedge a_i \in K\}$$

$$K[[x]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_i \in K\}$$

**(T1)** V K[[x]] ni deliteljev niča.
**(T2)** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ima multiplikativni inverz $\iff a_0 \neq 0$.

## 4.1 Linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi členi

$$c_d a_n + c_{d-1}a_{n-1} + \dots + c_o a_{n-d} = 0 \quad c_i \in \mathbb{C} \quad c_0,c_d \neq 0$$

$$P(x) = c_d\lambda^d + c_{d-1}\lambda^{d-1} + \dots + c_0$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n)\cdot\lambda_i^n$$

Kjer $P(x)$ **karakteristični polinom**, $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ njegove ničle in $p_i$ polinom stopnje < kratnost ničle $\lambda_i$.

$$c_d a_n + c_{d-1}a_{n-1} + \dots + c_o a_{n-d} = r(n)\cdot\lambda^n \quad c_i \in \mathbb{C} \quad c_0,c_d \neq 0$$

$$a_n = a_n^H + q(n)\cdot\lambda^n\cdot n^{\alpha}$$

Kjer $a_n^H$ rešitev homogenega dela, $deg(q) \leq deg(r)$ in $\alpha \geq 0$ kratnost $\lambda$ v $P(x)$.

### 4.1.1 Kompleksne ničle

$$\lambda = x + i\cdot y = |\lambda|\,(cos(\phi) + i\cdot sin(\phi)) \quad \overline{\lambda} = x - i\cdot y = |\lambda|\,(cos(\phi) - i\cdot sin(\phi))$$

$$a_n = A\cdot\lambda_n + B\cdot\overline{\lambda}_n = |\lambda|\,(A' cos(n\phi) + B' sin(n\phi))$$

## 4.2 Binomska vrsta in Catalanova števila

**Posplošeni binomski koeficient** za $\lambda \in K$, $n \in \mathbb{N}$, kjer K polje in $char(K) = 0$:

$$\binom{\lambda}{n} := \frac{\lambda^{\underline{n}}}{n!} = \frac{\lambda\cdot(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!} \in K$$

**Binomska vrsta** $B_\lambda(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}x^n$.
**(T1)** $(a+b)^{\underline{n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}a^{\underline{n-k}}\cdot b^{\underline{k}}$ za $n \in \mathbb{N}$ in $a,b \in K$.
**(T2)** $B_{\lambda_1}(x) + B_{\lambda_2}(x) = B_{\lambda_1+\lambda_2}(x)$ za $\lambda_1,\lambda_2 \in K$.
**(T3)** $(1+x)\cdot B'_\lambda(x) = \lambda B_\lambda(x)$.

**Catalanovo število** (dvojiška drevesa, Dycke-ove poti, tringulacije itd.):

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k\cdot C_{n-1-k} = \frac{1}{n+1}\cdot\binom{2n}{n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 \dots$$

## 4.3 Rodovne funkcije razčlenitev

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P}_k(n)\cdot x^n = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k}(1-x^i)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} P_k\cdot(n)x^n = \frac{x^k}{\prod_{i=1}^{k}(1-x^i)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)\cdot x^n = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)}$$

$\sigma(n)$ je # razčlenitev n z lihimi členi, $d(n)$ je # razčlenitev n z različnimi členi:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sigma(n)\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d(n)\cdot x^n = \prod_{i=0}^{\infty}(1+x^i)$$

**(T1)** # razčlenitev n, kjer sumandi sodi = # razčlenitev n, pri katerih se $\forall$ sumand pojavi sodo-krat.
**(T2)** # razčlenitev, kjer se noben sumand ne pojavi $\geq 2$ = # razčlenitev, kjer noben sumand deljiv s 3.

## 4.4 Uporabne vrste

$$e^{\lambda x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}x^n \qquad \frac{1}{1-\lambda x} = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda x)^n$$

$$\frac{1}{(1-\lambda x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}(\lambda x)^n \qquad \frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} Fib_n x^n$$

$$e^{\sum_{k|i}\frac{x^k}{k}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^i\cdot\frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{i,j} = \frac{1}{1-(x^i+x^j)}$$

$$c_n^I = [x_n] : \prod_{i\in I}\frac{1}{1-x^i}$$

$a_n^{i,j}$ je # kompozicij n s členi i ali j
$b_n^i$ je # permutacij v $S_n$, $\pi^i = id$
$c_n^I$ je # razčlenitev n na sumande velikosti $s_i$, kjer $s_i \in I$ in $I \subseteq \mathbb{N}$

# 5 Pólyjeva teorija

ogrlice (rotacija), zapestnice (rotacija + zrcaljenje)
X...množica korald, $|X| = n$, $G \subseteq S_X$, elementi G **delujejo** na X
$G \leq S_X$...G podgrupa $S_x \iff id \in G \wedge \pi,\gamma \in G \implies \pi\gamma \in G \wedge \pi \in G \implies \pi^{-1} \in G$
**Ciklična grupa** $C_n = \{(1\ 2\ \dots n)^i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$, $C_n \cong \mathbb{Z}_n$.
**Diedrska grupa** $D_n$ = grupa simetrij pravilnega n-kotnika (dovoljene rotacije in zrcaljenje), $|D_n| = 2n$.

$x,y \in X$ sta **ekvivalentna**, $x \sim y$ če $\exists g \in G : g \cdot x = y$.
**Orbite** so ekvivalenčni razredi za relacijo $\sim$, $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq X$ je orbita elementa x.
**Množica orbit** je $X/G = \{Gx \mid x \in X\}$.
**Stabilizator** za x je $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$, $G_x \leq G$.
**Množica negibnih točk g** je $X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$.
**Avtomorfizem grafa** G je taka $\varphi : V(G) \to V(G)$, če $\varphi$ bijekcija in velja $u - v \in E(G) \iff \varphi(u) - \varphi(v) \in E(G)$

## 5.1 Burnsidova lema

$$|G| = |G \cdot x| \cdot |G_x| \quad |X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

## 5.2 Ciklični indeks in Pólyjev izrek

**Ciklični indeks**...$Z_G$

$$Z_G(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{\text{c cikel g}} t_{|c|}$$

$$Z_{C_n}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \phi(d) \cdot t_d^{\frac{n}{d}}$$

$$Z_{D_n}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{2n} \sum_{d \mid n} \phi(d) \cdot t_d^{\frac{n}{d}} + \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t_1^1 \cdot t_2^{\frac{n-1}{2}} & ;\ \text{n lih} \\ \frac{1}{4} \cdot t_2^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{4} \cdot t_1^2 \cdot t_2^{\frac{n}{2}-1} & ;\ \text{n sod} \end{cases}$$

$$\phi(n) = |\{i \in [n] \mid D(n,i) = 1\}| = n \cdot \prod_{p \mid n} (1 - \frac{1}{p})$$

**Pólyjev izrek** pravi, da če je $G \leq S_X$ in $c : G \to \mathbb{N}$ $c(g) = \#$ ciklov v g, potem je # neekvivalentnih barvanj X z r barvami enako:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{c(g)} = Z_G(r, \dots, r)$$

**Enumerator**...$E_{G,X,R}$, kjer $|R| = r$, $B = \{\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\} \mid \beta_i \geq 0 \wedge \beta_1 + \dots + \beta_r = n\}$ in $A(\beta) = \#$ neekvivalentnih barvanj, kjer $\beta_i$ korald barve i:

$$E_{G,X,R} = \sum_{\beta \in B} A(\beta) \cdot \prod_{k=1}^{r} u_k^{\beta_k}$$

**Pólyjev izrek (posplošitev)** pravi:

$$E_{G,X,R} = Z_G(u_1 + \dots + u_r, \dots, u_1^n + \dots + u_r^n)$$